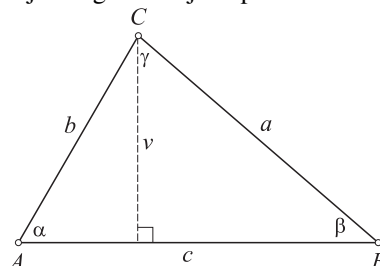


## Poučci o trokutu i veza između sinusa i kosinusa

Marko Obradović<sup>1</sup>, Mirko Radić<sup>2</sup>

Osnovni elementi trokuta su njegovi kutovi i stranice. Jedna od veza između stranica i kutova u trokutu iskazana je poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu. Što je s njihovom povezanošću? Matematičare je to zanimalo još od davnine. Naime, “riješiti trokut” znači iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente. Odavde je iznimna važnost navedenih poučaka.

Nacrtajmo bilo koji trokut  $ABC$  i označimo njegove elemente kao na slici. Svakako je uz izvode korisno imati i jasnu geometrijsku predodžbu.



Koristit ćemo sljedeće standardne oznake:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – duljine stranica trokuta;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – njegovi odgovarajući kutovi;  $R$  – polumjer opisane mu kružnice;  $P$  – njegova površina.

Još iz osnovne škole znamo da je trokut zadan svojim elementima i to:

- (a) jedna stranica i dva kuta;
- (b) dvije stranice i kut nasuprot većoj od njih;
- (c) dvije stranice i kut među njima;
- (d) tri stranice.

U slučajevima (a) i (b) koristimo poučak o sinusima, a u slučajevima (c) i (d) kosinsov poučak. Koristit ćemo poznate identitete:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi,$$

$$(1^\circ) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(2^\circ) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Promatrat ćemo vezu između poučaka (1) i (2).

### Poučak o sinusima

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R} = K. \quad (1)$$

### Poučak o kosinusu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (2)$$

Cikličkom zamjenom dobivamo još dvije pridružene formule.

<sup>1</sup> Profesor matematike u srednjoj školi “Marko Marulić” u Slatini

<sup>2</sup> Profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci; e-pošta: [mradic@ffri.hr](mailto:mradic@ffri.hr)

Razmotrimo sada vezu između tih poučaka. Pokažimo najprije kako iz (1) dobivamo (2).

Iz (1) imamo:  $\frac{\sin \alpha}{a} = K$  tj.  $aK = \sin \alpha$ , odnosno,  $bK = \sin \beta$ ,  $cK = \sin \gamma$ .

Kvadriranjem dobivamo

$$K^2 a^2 = \sin^2 \alpha = \sin^2(\beta + \gamma),$$

jer je  $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ . Upotrebom teorema ( $1^\circ$ ) za sinus dobivamo:

$$\begin{aligned} K^2 a^2 &= (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \\ &= \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + (1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) \\ &= K^2 (b^2 + c^2) - 2K^2 bc (-\cos(\beta + \gamma)) \\ &= K^2 (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - (\beta + \gamma))) \\ &= K^2 (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha). \end{aligned}$$

Kako je  $K \neq 0$ , dobivamo poučak (2) o kosinusu.

Cikličkom zamjenom imamo i njoj srodne dvije formule.

Pokažimo da vrijedi i obrat. Neka vrijedi (2), odnosno, i ciklički srodna formula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \quad (3)$$

Iz  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  dobivamo

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2}{1 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \dots = \frac{a^2}{b^2},$$

odakle je  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$ , što smo i trebali pokazati. Analogno slijedi  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ , a to je poučak o sinusima (1).

**Primjer.** Duljine dviju stranica u trokutu  $ABC$  iznose 5 cm i 8 cm, a kut nasuprot jedne od ovih dviju je dva puta je manji od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice?

Ne smanjujući općenitost možemo uzeti da je  $a = 5$  cm,  $b = 8$  cm, te  $\beta = 2\alpha$ . Iz poučka o sinusima (1) imamo  $a : b = \sin \alpha : 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Odnosno,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Iz  $\beta = 2\alpha$ , imamo  $\sin \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$ ,  $\cos \beta = \frac{7}{25}$ . Zatim,

$$\cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{44}{125}.$$

Konačno je  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = \left( \frac{39}{5} \right)^2$ , odakle je  $c = 7.8$  cm.

## Neke crtice iz prošlosti

Matematika se tokom svoje povijesti nije mogla odvojiti od astronomije. Prva trigonometrijska računanja javljaju se vrlo rano, još u starom Babilonu i Egiptu, i to u astronomiji

Začetnici trigonometrije su Grci u 3. st. pr. Krista. Prve tablice nalik onima za *sinus* funkciju sastavili su Indii u 5. st. pr. Krista.

Kroz povijest matematičari su na razne načine pokušavali naći vezu poučaka (1) i (2). Poučak o sinusima opisao je Abual-Wafa (940.–998.).

F. Viète (1540.–1603.) je izveo poučak o kosinusu u današnjem obliku. Povezao je trigonometriju s algebrom. Matematičari koji su pridonijeli procvatu trigonometrije bili su: J. Napier, L. Euler, K. F. Gauss, R. Bošković,...

## Zadaci (za vježbu)

1. Odredi nepoznate elemente u trokutu, ako je zadano:  $a = 42$  cm,  $b = 37.1$  cm, kut  $\gamma = 67^\circ 19'$ .
2. Ako je zbroj duljina dviju stranica trokuta  $a + b = 85$  cm, duljina polumjera trokutu upisane kružnice 9.6 cm, te  $\gamma = 46^\circ 12'$ , odredi površinu tog trokuta.
3. Odredi nepoznate stranice trokuta ako je  $a : b = 12 : 7$ ,  $c = 3$  cm i  $\alpha = 2\gamma$ .
4. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna cijela broja, a najveći je kut trokuta dvostruko veći od najmanjeg. Kolike su duljine stranica i kutovi trokuta?

Upute.

1. Imamo:  $c = 44.03$  cm,  $\alpha = 61^\circ 39'$ ,  $\beta = 51^\circ 2'$ .
2. Iz  $x = \frac{a+b-c}{2} = \frac{85-c}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{x}$ , imamo  $c = 39.9262$  cm,  $P = 599.9339$  cm<sup>2</sup>.
3. Dobivamo:  $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin \gamma} = 2 \cos \gamma$ ,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ , odakle je  $28a^3 - 193a^2 + 1296 = 0$ . Jedno rješenje je  $a_1 = 4$ ,  $28a^3 - 193a^2 + 1296 = 28(a-4)\left(a - \frac{36}{7}\right)\left(a + \frac{9}{4}\right)$ , pa postoji još jedno pozitivno rješenje  $a_2 = \frac{36}{7}$ .  
Odgovarajuće stranice su  $b_1 = \frac{7}{3}$ ,  $b_2 = 3$ .
4. Duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6, a kutovi  $\alpha = 41^\circ 24' 35''$ ,  $\beta = 55^\circ 46' 16''$  i  $\gamma = 82^\circ 49' 9''$ .

## Literatura

- [1] N. ELEZOVIĆ, Ž. HANJŠ, S. VAROŠANEC, *Matematičko natjecanje* 3, 1999.
- [2] V. MIČIĆ I DR., *Matematika za 3. r. srednjih škola*, Novi Sad, 2000.
- [3] M. VALČIĆ, *Trigonometrija (odabrani zadaci)*, Element d.o.o., Zagreb 2000.